Числові системи

Група 321

Викладач Котова О.

Тема: Система дійсних чисел. Властивості поля дійсних чисел (6 год)

Короткі теоретичні відомості

План

1. Розширення поля раціональних чисел
2. Аксіоматична теорія дійсних чисел
3. Еквівалентність аксіоми Архімеда і аксіоми повноти існування в полі граничного елементу в будь-якому нескінченній обмеженій множині.
4. Упорядкованість поля дійсних чисел
5. Упорядкованість поля дійсних чисел

Розширення поля раціональних чисел

В полі раціональних чисел Q не завжди виконується операція граничного переходу для фундаментальних послідовностей, тобто поле Q не є повним. Розширимо числове поле Q до нового поля R, в якому було б визначено розташування, і будь-яка фундаментальна послідовність мала б границю. При цьому не завжди виконана в Q операція граничного переходу для функціональних послідовностей в новому полі R, для тих же послідовностей із Q була б виконана. Значить, фундаментальні послідовності із Q повинні залишатися фундаментальними і в R. Це означає, що R повинно бути повним і архімедовськи розташованим полем. Іншими словами, поле R повинно бути неперервним. Таким чином, шукаємо мінімальне розширення з потрібними властивостями. Однак виявиться, що умова мінімальності буде виконана сама собою, так як поле неперервністю визначено вже однозначно до ізоморфізму. Тому в означення поля дійсних чисел вимогу мінімальності не включають.

<u>*Означення:*</u> Повне архімедовськи розташоване поле називають неперервним полем, тобто послідовності в цьому полі завжди мають границю і виконується аксіома Архімеда: $\forall a \in P \exists n \in N n > a$.

<u>*Означення:*</u> (на мові розширення) Полем дійсних чисел R називають неперервне поле, що містить поле раціональних чисел. $Q \subset R$.

<u>*Теорема:*</u> Розташоване поле $P, Q \subset P$, тоді і тільки тоді архімедовськи розташоване, коли $\forall x \in P \quad x = \lim a_n$, де $\{a_n\} \in Q$, тобто будь-який елемент поля є границя послідовності раціональних чисел.

<u>*Теорема:*</u> Поле дійсних чисел є мінімально повним (мінімально неперервним) полем і максимально архімедовськи розташованим полем.

Аксіоматична теорія дійсних чисел

<u>*Означення.*</u> Множина R - довільної природи, на якій визначені дві операції $(+,\cdot)$, що задовольняють аксіомам $A_{1.} - A_{13.}$, називається полем дійсних чисел, а його елементи дійсними числами.

$A_1. \forall a,b \in R a+b=b+a$

$A_2. \forall a,b,c \in R (a+b)+c=a+(b+c)$

$A_3. \exists 0 \in R \forall a \in R a+0=a$

$A_4. \forall a \in R \exists -a \in R a+(-a)=0$

$A_5. \forall a,b \in R ab=ba$

$A_6. \forall a,b,c \in R (ab)c=a(bc)$

$A_7. \exists 1 \in R \forall a \in R a1=a$

$A_8. \forall a \neq 0 \in R \exists a^{-1} \in R aa^{-1}=1$

$A_9. \forall a,b,c \in R (a+b)c=ac+bc$

A_{10}. *аксіома потужності*. В R існує не менше двох елементів

A_{11}. *аксіома характеристики поля нуль* $\forall n \in N n1 \neq 0$

A_{12}. *аксіома Архімеда* $\forall a \in R \exists n \in N n > a$

A_{13}. *аксіома повноти* $\forall\{a_n\}\in R \lim a_n=\alpha, \alpha\in R$

<u>*Теорема*</u> Аксіоматична теорія дійсних чисел несуперечна.

<u>*Теорема*</u>*:* Аксіоматична теорія дійсних чисел категорична.

Еквівалентність аксіоми Архімеда і аксіоми повноти існування в полі граничного елементу в будь-якому нескінченній обмеженій множині.

<u>*Означення:*</u> Перетином впорядкованої множини P називається пара непустих множин X, Y, підмножин множини P, що не мають спільних елементів, об'єднання яких дорівнює P,
тобто $X\cap Y=\varnothing, X\cap Y=P \forall x\in X, \forall y\in Y, x<y$.

<u>*Означення*</u>: Якщо елемент α є найбільшим елементом в X, причому Y не має найменшого елементу, або ж α є найменшим елементом Y, причому X не має найбільшого елемента, то елемент α називається межею даного перетину.

<u>*Означення*</u>: Елемент b впорядкованої множини P називається граничним елементом множини A, якщо для будь-яких елементів b_1, b_2, таких, що $b_1<b<b_2$, існує нескінченна множина елементів α із A, для яких $b_1<a<b_2$.

Означення 5.3.4.Нехай P - розташоване поле. Елемент b називається граничним для множини A, якщо для будь-якого елементу $\varepsilon>0$ із P існує нескінченна множина елементів α із A, для яких $|a-b|<\varepsilon$.

<u>*Теорема*</u>*:* Наступні три властивості розташованого поля P еквівалентні:

а) в полі P виконані аксіоми $A_{12.}$ і $A_{13.}$, із означення поля R;

б) будь-який перетин поля P має межу;

в) будь-яка нескінченна обмежена множина елементів поля P має граничний елемент.

Властивості а), б), в) еквівалентні. Поле дійсних чисел аксіоматично можна визначити властивостями A_1-A_{11} і будь-якою із властивості а), б), в).

Упорядкованість поля дійсних чисел

<u>*Теорема:*</u> **(**про існування будь-якого натурального степеня із додатного числа**).**

$\forall\alpha\in R\forall k\in N\ \alpha>0\to\exists\beta\in R\ \beta^k=\alpha$ і $\beta>0$, тобто для будь-якого натурального k і дійсного α, якщо $\alpha>0$, то існує і тільки одне додатне число β, таке, що $\beta^k=\alpha$.

<u>*Теорема:*</u> Поле дійсних чисел можна лінійно і строго упорядкувати не більше, ніж одним способом.

Властивості дійсних чисел

<u>*Означення.*</u> Кожній дійсній послідовності $\{a_n\}$ дійсних чисел можна зіставити два об'єкта:

1. послідовність $\{s_n\}$, де $s_n=\sum\limits_{x=0}^{n}a_x$;

2. вираз $\sum\limits_{x=0}^{\infty}a_x$, який називається рядом.

Якщо послідовність $\{s_n\}$ збігається до дійсного числа r, то r називають сумою ряду $\sum\limits_{x=0}^{\infty}a_x$.

<u>*Теорема*</u> Якщо $q\geq 2$ - натуральне число, то

$$\sum_{x=0}^{\infty}a_x q^{-x}=\frac{q}{q-1}.$$

<u>*Теорема*</u> Нехай $q\geq 2$ ціле число. Кожне дійсне число можна подати і причому єдиним чином у вигляді $r=\pm q^n\sum\limits_{x=0}^{\infty}a_x q^{-x}$ (1) причому:

1. якщо r >0, то беремо знак +, якщо r <0, то знак -;

2. якщо r =0, $n=0$ і $\forall x\geq 0\ \ a_x=0, x\in N$ (тобто $a_0=a_1=...=a_n=0$);

3. якщо $r\neq 0$, то n і всі a_x - ціле, крім того, $a_0>0\ \forall x>0\ 0\leq a_x<q-1$ і $\exists n_0\forall x>n_0\ a_x=q-1$.(умова не існування періодичного дробу з періодом q-1)

Вираз $q^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x q^{-x} = a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + ... + a_{n+k} q^{-k} + ...$, де $q \geq 2$ і $0 \leq a_n \leq q-1$ є нескінченний дріб з основою q, що на практиці записують так:

$a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+k}, ...$, що зручно для запису дробу, так і для виконання операцій над ними.

Частинними випадками нескінченного системного дробу є:

а) ціле системне число, що маємо при $a_{n+1} = ... = 0$.

б) скінчений системний дріб, який маємо при умові, що $\exists k \forall m$ $m > k \to a_{m+k} = 0, k, m \in N$;

в) нескінченний періодичний (чистий або змішаний) системний дріб, частина або всі дробові знаки якого періодично повторюються;

Дробами виду а), б), в) зображають раціональні числа, а нескінченними періодичними дробами – ірраціональні числа.

<u>*Означення.*</u> За алгоритмом Евкліда кожне раціональне число $\frac{a}{b}$ можна подати у вигляді скінченого ланцюгового дробу

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + ... + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}},$$

що скорочено пишеться так: $\frac{a}{b} = [q_0, ..., q_n]$, де q_0 - ціле, а $q_1 ... q_n$ - натуральні числа, $q_n > 1$.

<u>*Означення*</u> Дріб виду $\frac{P_k}{Q_k} = [q_0, ..., q_n]$ $0 \leq k \leq n$ називають дробом k- го порядку.

Властивості підхідних дробів.

1. $P_{k+1} = q_{k+1} P_k + P_{k-1}, Q_{k+1} = q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}, k \geq 1$

2. $P_{k+1} Q_k - Q_k P_k = (-1)^k, k = 0$

3. $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}}$.

4. підхідні дроби парного порядку утворюють зростаючу послідовність, непарного порядку – спадаючу; будь-який дріб непарного порядку більше будь-якого підходящого дробу парного порядку;

5. парні дроби мають приближення до $\frac{a}{b}$ з недостачею, а непарні - з надлишком, оцінку виражають нерівністю:

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{P_k}{Q_k}\right| \le \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \le \frac{1}{Q_k\left(Q_k+Q_{k+1}\right)} \le \frac{1}{Q^2 k}.$$

Означення Нескінченним ланцюговим дробом називають вираз виду $q_0+\cfrac{1}{q_2+\dots\cfrac{1}{q_n+\cfrac{1}{\dots}}}$, або скорочено $[q_0,\dots,q_n\dots]$.

Теорема: Існує тільки одне дійсне число r, що $\lim a_n = \lim b_n = r \wedge a_n \le r \le b_n, n \in N$.

Теорема. Нескінченний ланцюговий дріб збігається.

Означення. Систему двох послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називають подвійною послідовністю, якщо вони мають властивості:

1. $\forall n \in N, a_n \le b_n$

2. $\forall n, a_n < a_{n+1} \wedge b_{n+1} \le b_n$

3. $\lim(a_n - b_n) = 0$.

Теорема Якщо α - значення ланцюгового дробу (скінченого або нескінченого), то для будь-якого $k>1$ справедлива рівність: $\alpha = \frac{\alpha_k P_{k-1}+P_{k-2}}{\alpha_k Q_{k-1}+Q_{k-2}}$.

Теорема: Будь-якому дійсному ірраціональному числу відповідає єдиний нескінченний ланцюговий дріб, значення якого є це дійсне число. Навпаки, будь-який нескінченний ланцюговий дріб представляє собою одне і тільки одне дійсне ірраціональне число.

Теорема. Множина дійсних чисел має потужність континуума.

Практичні роботи (6 год.)

[1]: № 7.1 — 7.102

Література

1. *Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С.* Числові системи.— К.: Вища школа, 1988.— 271 с.

2. *Нечаев В.И.* Числовые системы.— М.: Просвещение, 1975.— 199с.

3. *Феферман С.* Числовые системы. Основания алгебры и анализа.— М.: Наука, 1971.— 440 с.